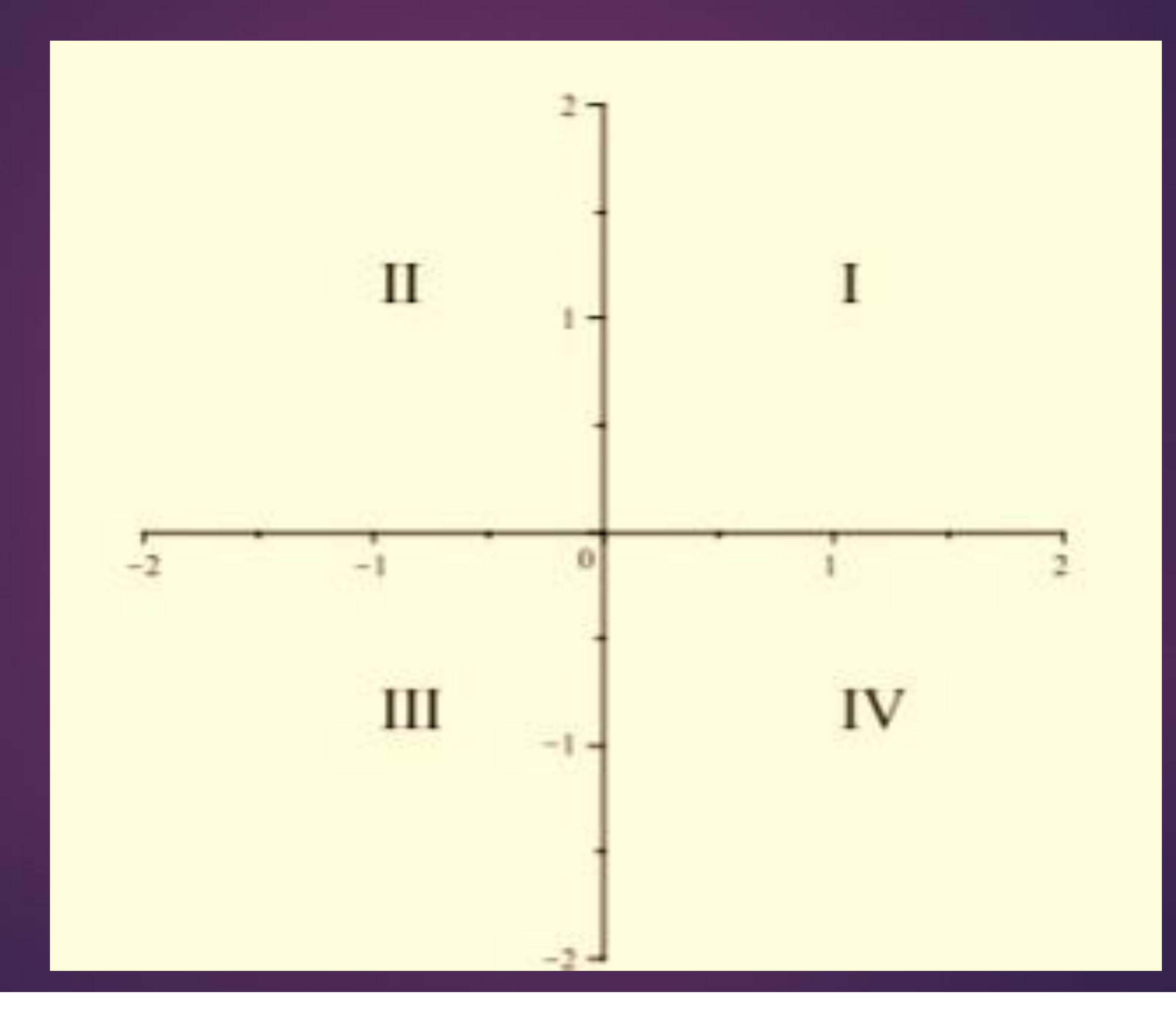

Definiciones y operaciones con vectores.

SISTEMAS DE COORDENADAS

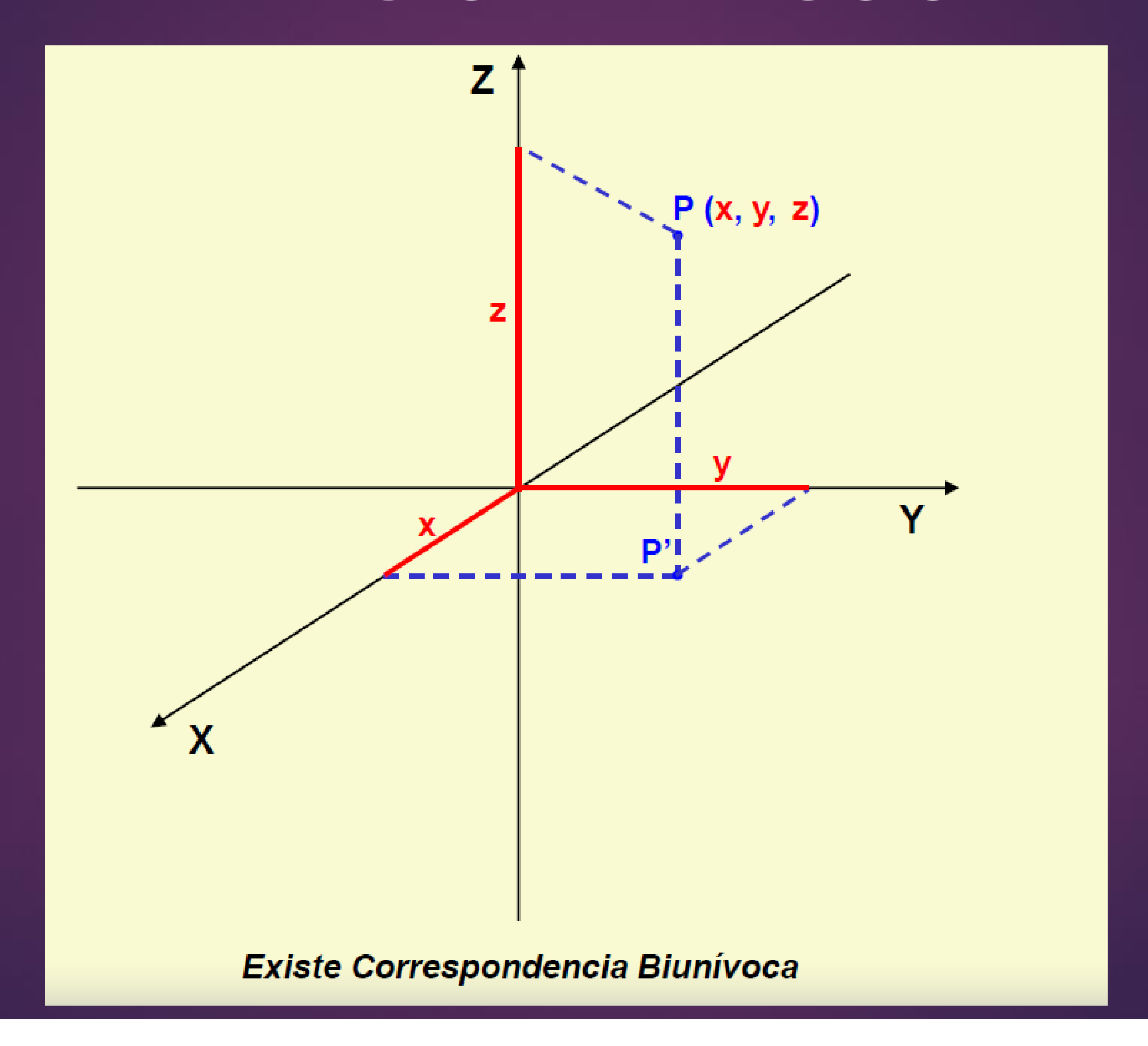
SISTEMAS UNIDIMENSIONAL DE COORDENADAS

- Origen
- Direccion
- Unidad

SISTEMAS BIDIMENSIONAL DE COORDENADAS

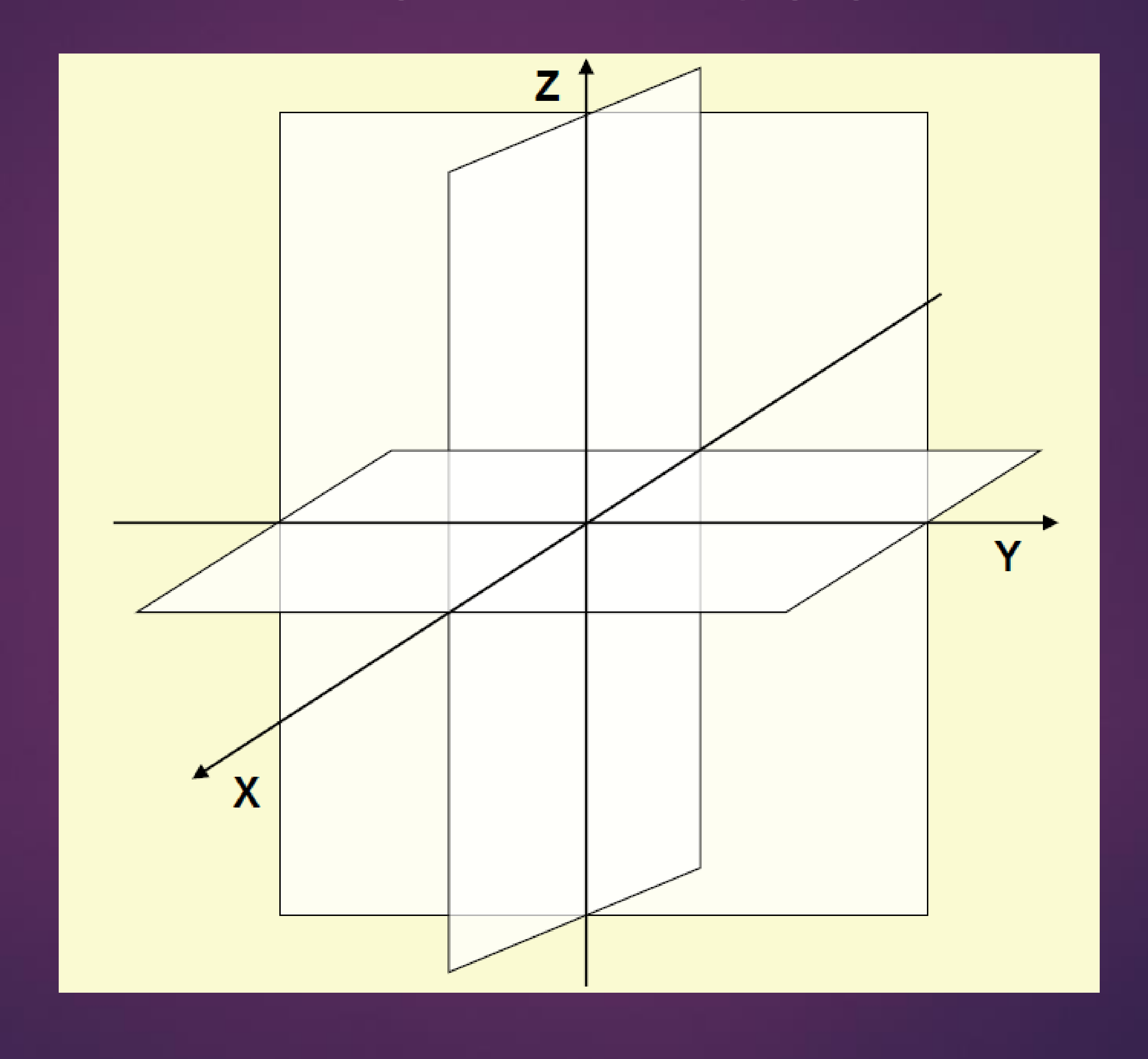


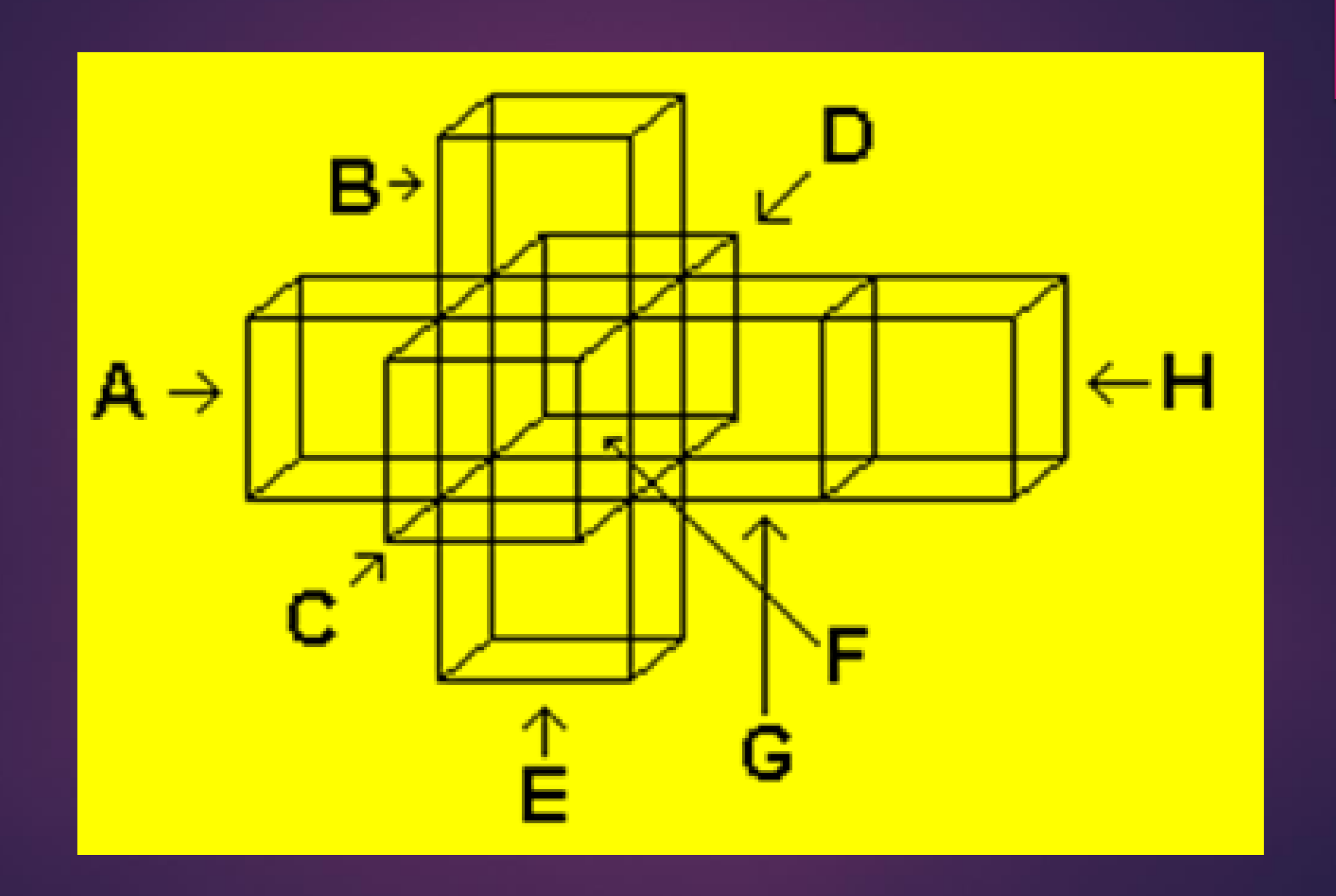
SISTEMAS TRIDIMENSIONAL DE COORDENADAS



Existe Correspondencia Biunívoca

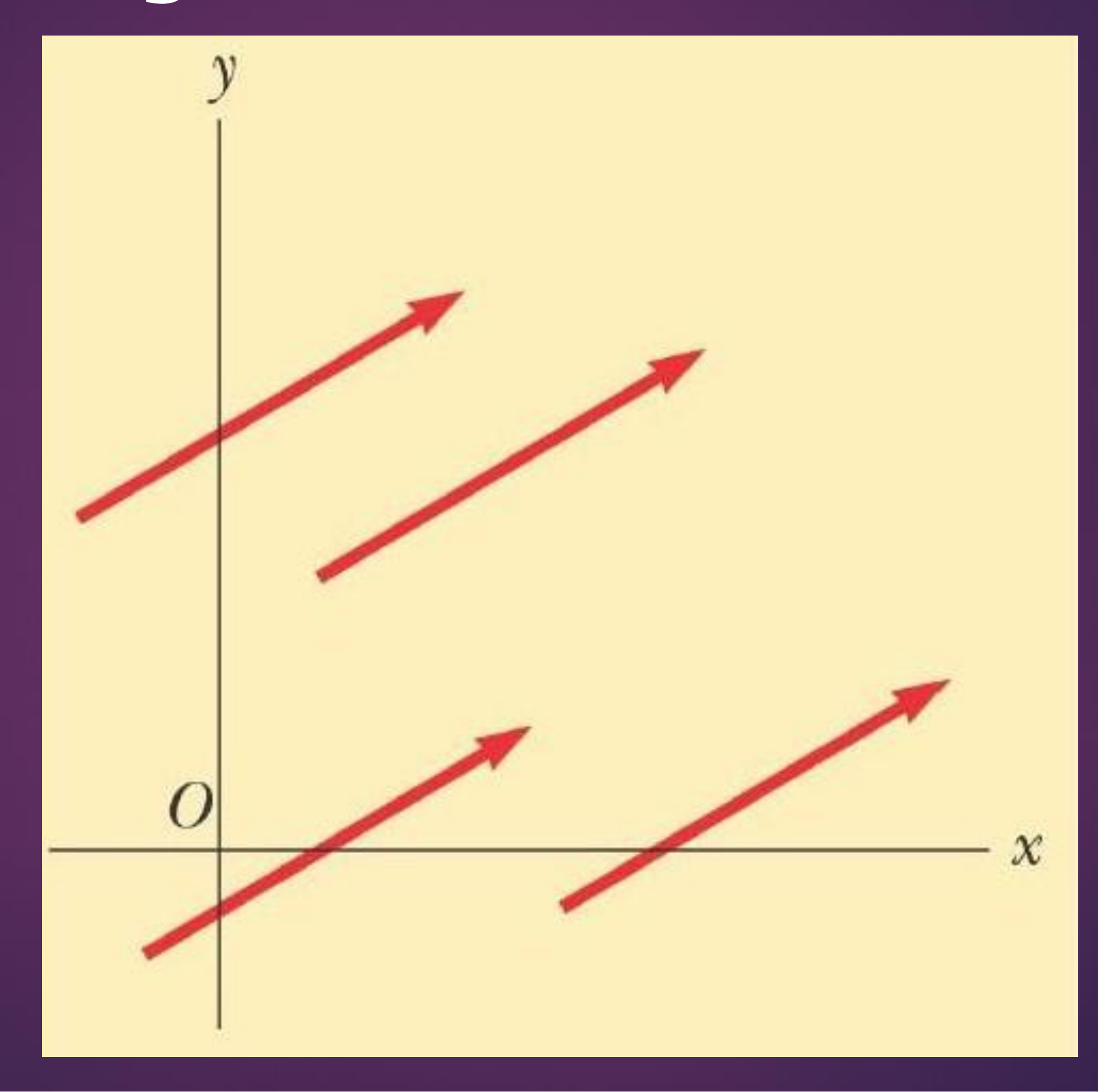
SISTEMAS TRIDIMENSIONAL DE COORDENADAS

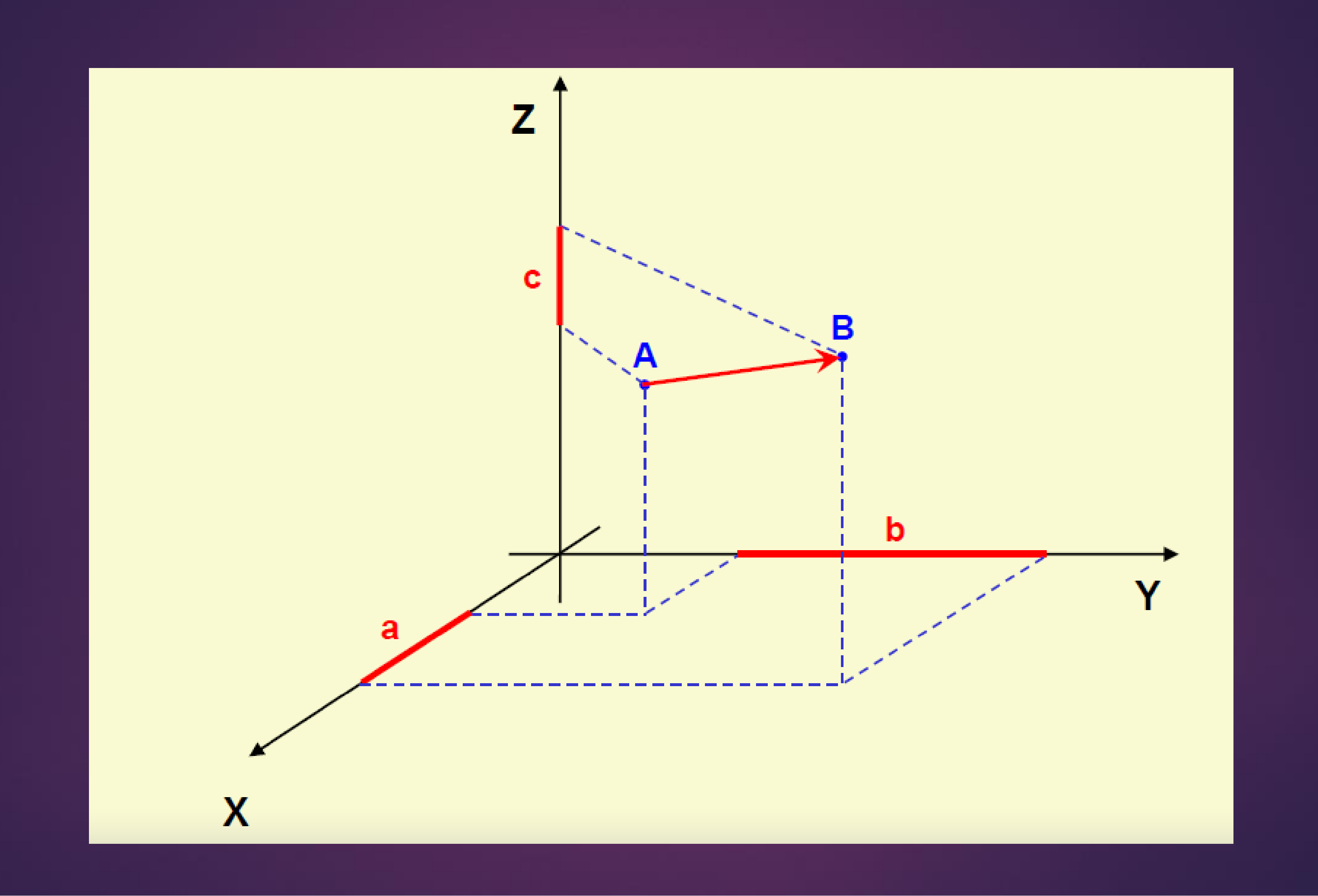




A
B
C
D
E
F
G
H

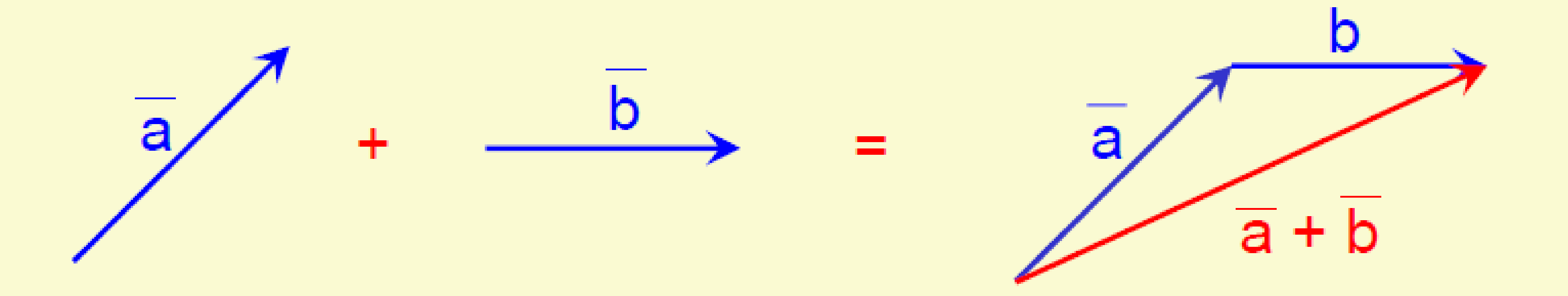
Representación geométrica de vectores en R^2

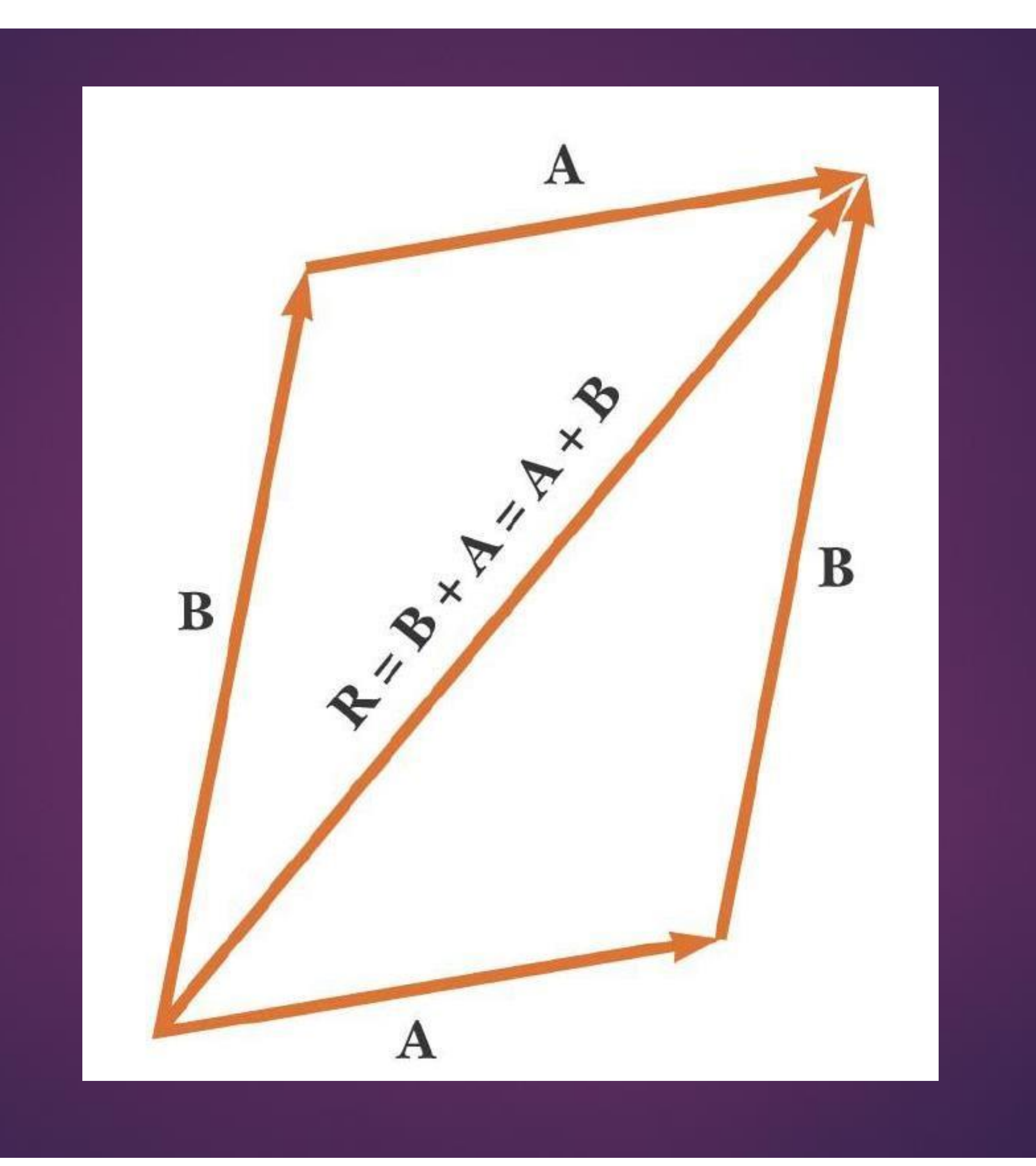


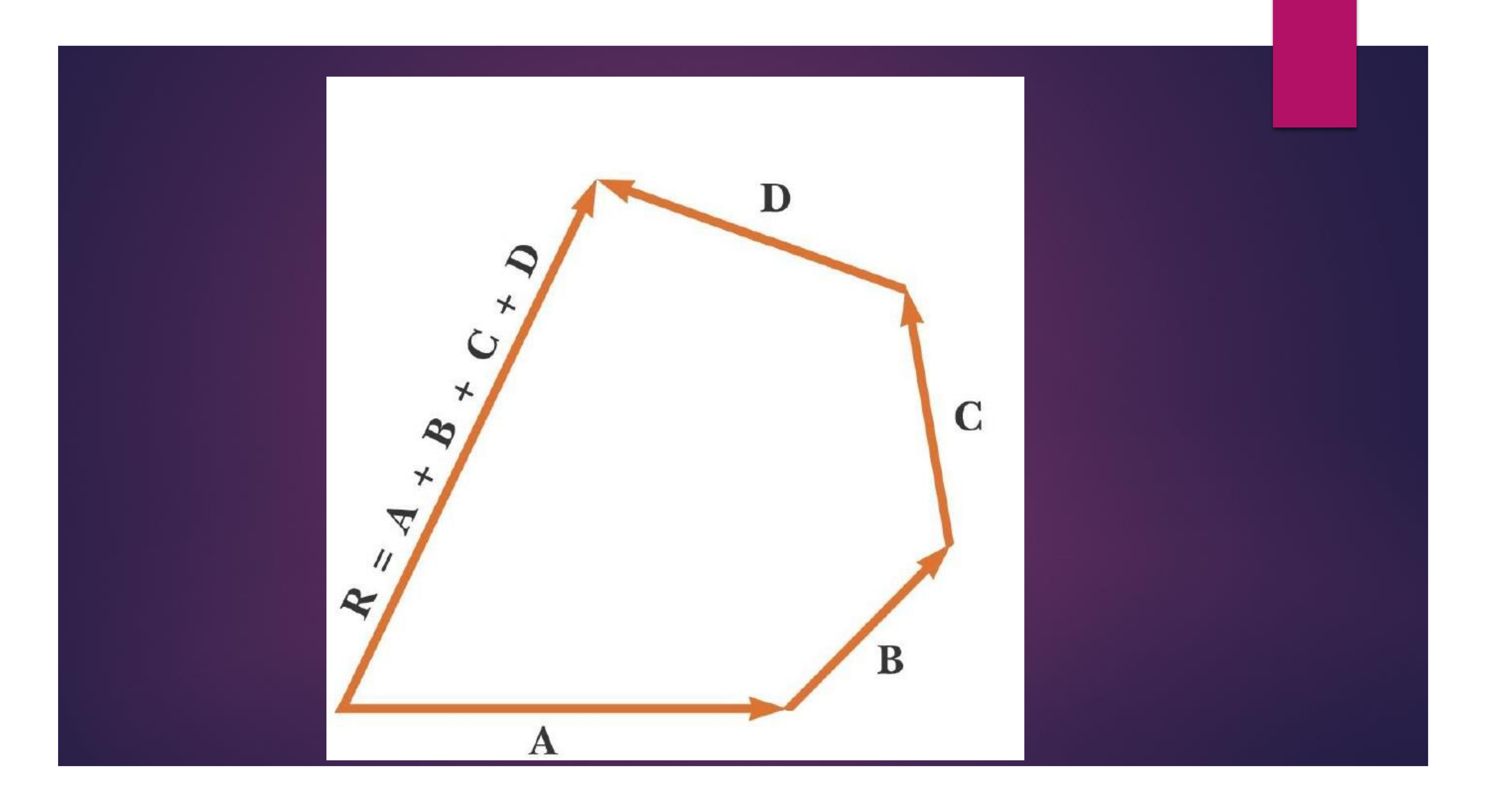

Z
c
A
B
b
Y
a
X

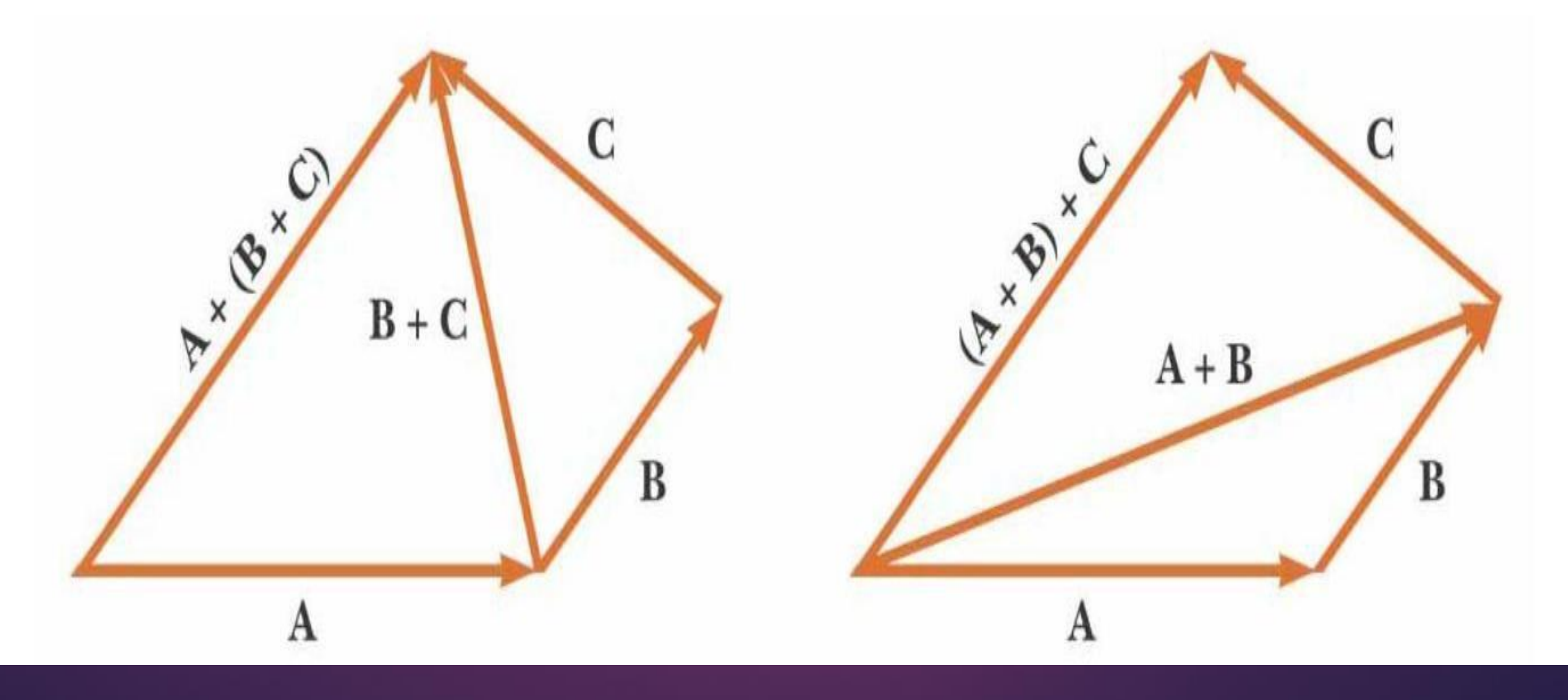
OPERACIONES CON VECTORES

Geométricamente la suma de vectores se realiza como sigue:

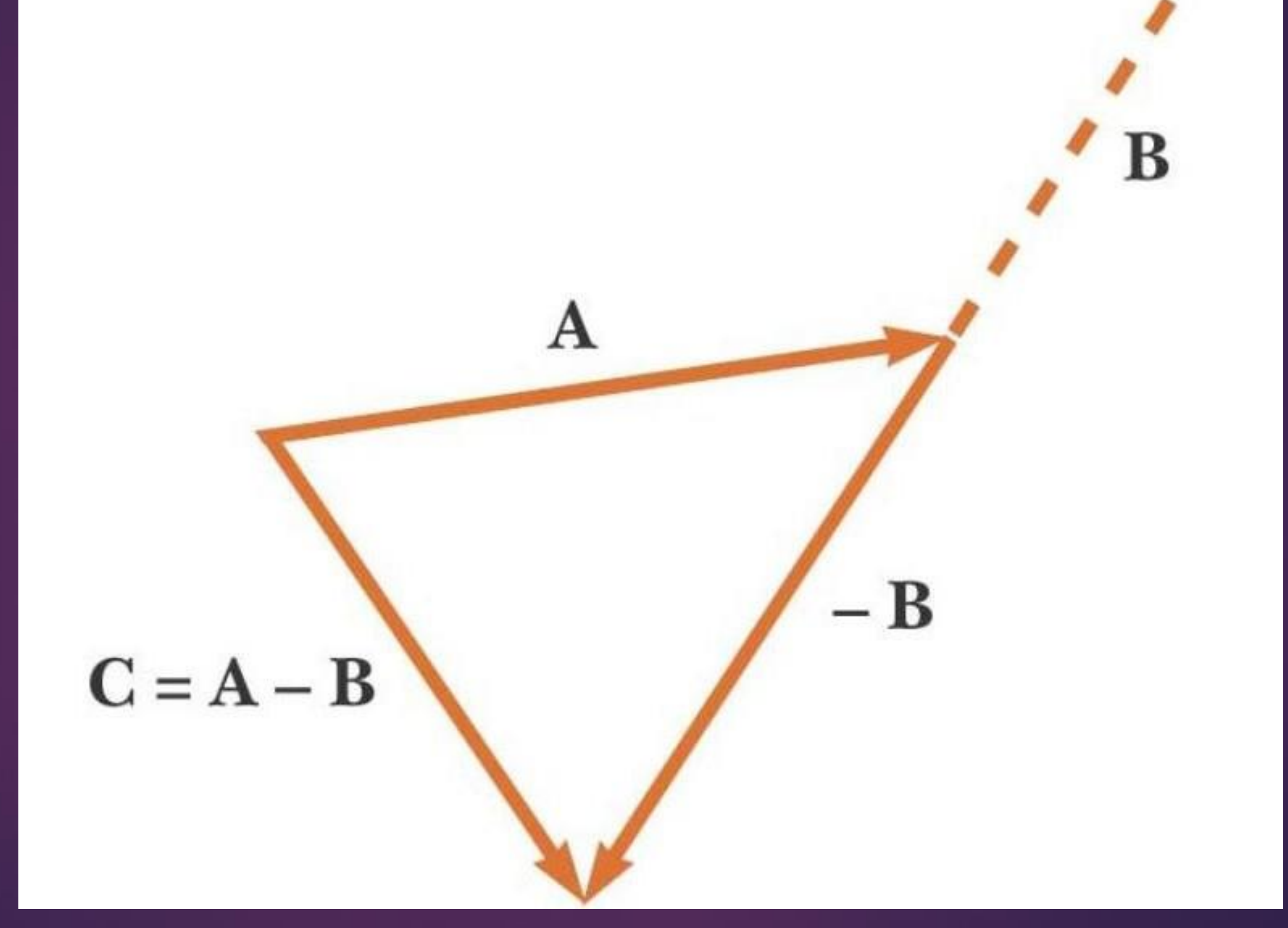



A
B
R = B + A = A + B
B
A

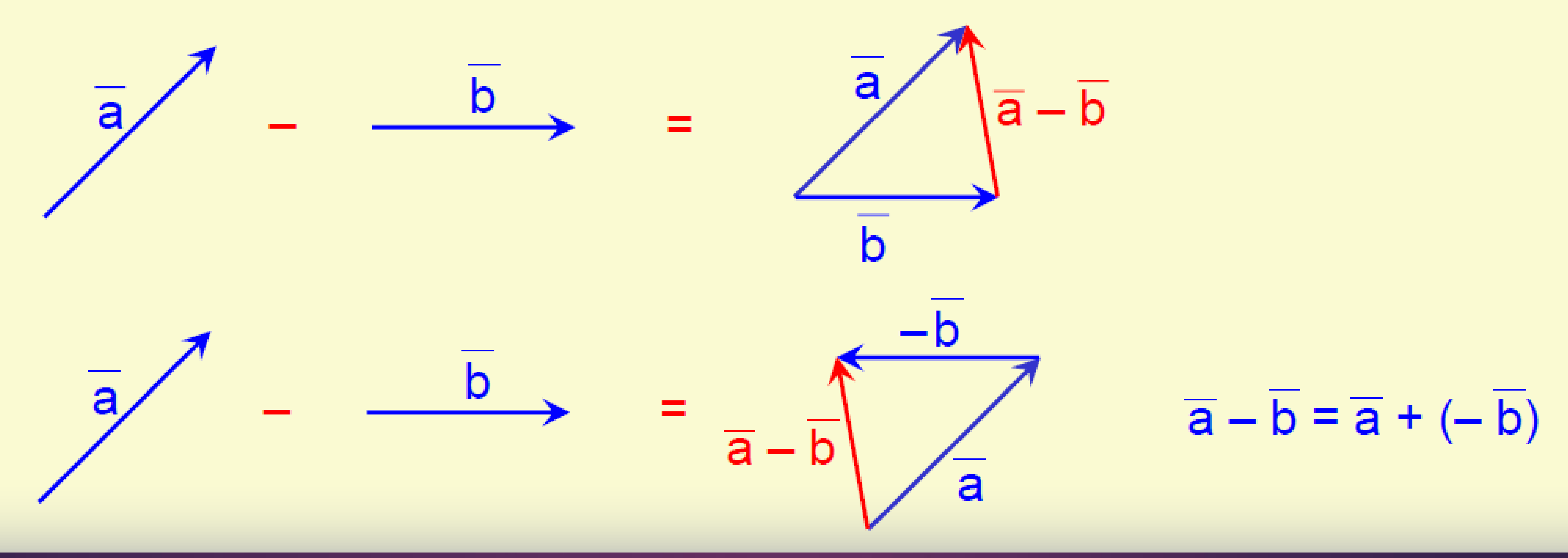

R = A + B + C + D
D
C
B
A


Propiedad Asociativa de la Suma (A + B) + C = A + (B + C)
A + (B + C)
B + C
C
B
A
(A + B) + C
A + B
C
B
A

SUSTRACCIÓN DE VECTORES



Geométricamente la sustracción de vectores se puede realizar de dos formas



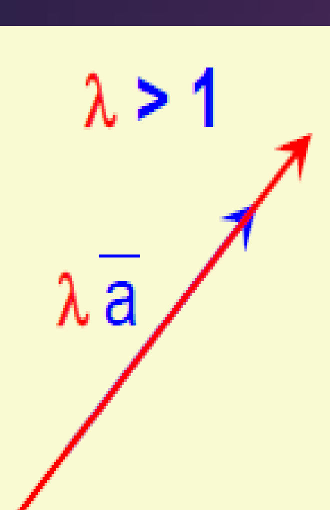
PARALELISMO Y ORTOGONALIDAD DE VECTORES

Def.-Sean a, b $\in R^n$ decimos que dichos vectores son paralelos y se a \\ b si a = rb (o b = sb) donde r y s son reales

i)Si r es positivo los vectores tienen la misma dirección

ii)Si r es negativo los vectores tienen direcciones opuestas

Obs.-El vector cero 0 es paralelo a todo vector



$\lambda = 1$

$\lambda \overline{a}$

$0 < \lambda < 1$

$\lambda \overline{a}$

$\lambda = 0$

$\lambda \overline{a} = \overline{0}$

$0 > \lambda > -1$

$\lambda \overline{a}$

$\lambda = -1$

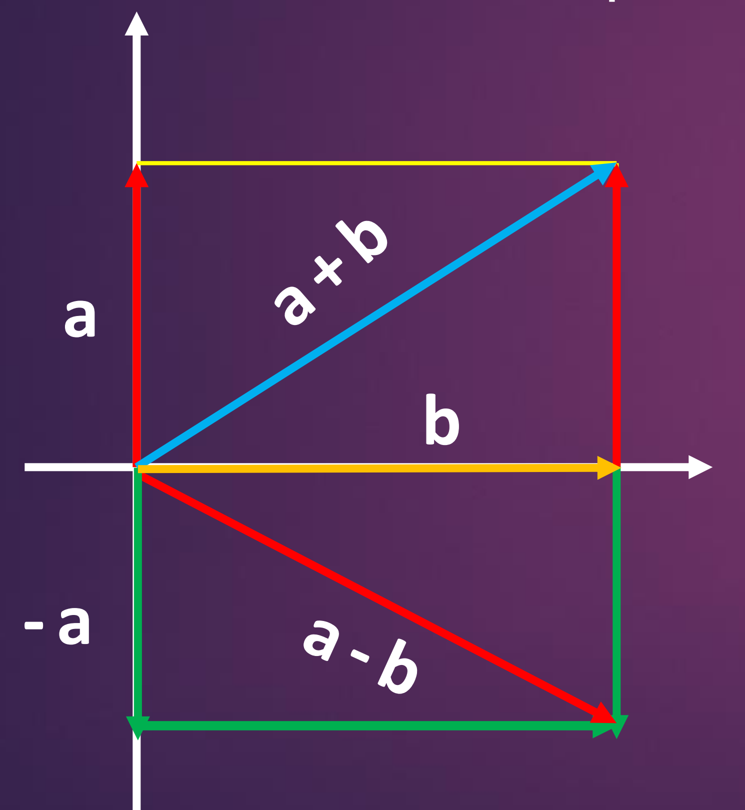
$\lambda \overline{a}$

$\lambda < -1$

$\lambda \overline{a}$

ORTOGONALIDAD DE VECTORES

Sean a y b vectores de R^n , decimos que los vectores son ortogonales y denotamos a $a \perp$ b $\longleftrightarrow$ $|a+b|$ = $|a-b|$, es decir :



$$|a+b|^2 = |a-b|^2$$

$$|a|^2 + |b|^2 + 2a.b = |a|^2 + |b|^2 - 2a.b$$

$$4\,a\,.\,b = 0$$



$$a \perp b \quad \longleftrightarrow \quad a\,.\,b = 0$$

$$|\bar{a}| = \|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}.\bar{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, \ldots, a_n).(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

MAGNITUD, LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR.

Norma de un vector. Dado el vector $\bar{a}$ de R^n, se define su norma como el número:

$$|\bar{a}| = \|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}.\bar{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, \ldots, a_n).(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

- **A la norma también se le denomina modulo, magnitud o longitud del vector.**

n

MAGNITUD, LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR.

Norma de un vector. Dado el vector a de R^n , se define su norma como el número:

$$|\bar{a}| = \|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}.\bar{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, \ldots, a_n).(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

- **A la norma también se le denomina modulo, magnitud o longitud del vector.**

Propiedades fundamentales

i) $\left|\bar{a}\right| \geq 0; \quad \left|\bar{a}\right| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

ii) $\left|r\bar{a}\right| = |r|\left|\bar{a}\right|$, donde $r \in R$

iii) $<\bar{a}; \bar{a}> = \bar{a}.\bar{a} = \left|\bar{a}\right|^2$

iv) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right| \leq \left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|$ (desigualdad triangular)

v) $\left|\bar{a} \pm \bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 \pm 2\bar{a}.\bar{b}$

Demostraciones:

i) Como $a_i^2 \geq 0 \; \forall i = 1,2,....n$; entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geq 0 \Rightarrow |\bar{a}| \geq 0$

Ahora $|\bar{a}| = 0 \Leftrightarrow |\bar{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Leftrightarrow a_i^2 = 0, \; \forall i = 1,2,....n \Leftrightarrow a_i = 0, \; \forall i = 1,2,....n \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

iii) $<\bar{a}; \bar{a}> = \bar{a}.\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \right]^2 = |\bar{a}|^2$

v) $\left|\bar{a} \pm \bar{b}\right|^2 = (\bar{a} \pm \bar{b}).(\bar{a} \pm \bar{b}) = \bar{a}.\bar{a} \pm \bar{a}.\bar{b} \pm \bar{b}.\bar{a} + \bar{b}.\bar{b} = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 \pm \bar{a}.\bar{b} \pm \bar{b}.\bar{a} = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 \pm \bar{a}.\bar{b} \pm \bar{a}.\bar{b}$

$$= \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 \pm 2\bar{a}.\bar{b}$$

Comentarios. En la desigualdad triangular, la igualdad ocurre si uno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Desigualdad de Cauhy – Schwarz.

Si a y b son vectores de R^n tenemos:

$$(a.b)^2 \leq (a.a)(b.b)$$

Demostración

La desigualdad es trivial si a o b es el vector cero.
Supongamos que los vectores a y b son no nulos.Sea el vector C = xa – yb, donde x = b.b y y=a.b

Sabemos que C.C ≥0 ,luego reemplazando:

C.C =(xa – yb) . (xa – yb) de donde resulta:

$$(b.b)^2 (a.a) - (a.b)^2 (b.b) + (a.b)^2 (b.b) \geq 0$$

Pero como b.b ≥0 puesto que b es no nulo;dividiendo entre b.b resulta:

$$(b.b)(a.b) - (a.b)^2 \geq 0$$

Desigualdad de Cauchy - Schwarz. Dados $\overline{a}$ y $\overline{b} \in R^n$ se tiene: $\left|\overline{a}.\overline{b}\right| \leq \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|$

Comentario. La igualdad ocurre si uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro.

VECTOR UNITARIO.

Normalización de un vector (vector unitario). Dado un vector no nulo $\bar{a} \in R^n$,

asociado a él se construye un vector de modulo 1, denominado vector unitario, de modo que:

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Consecuencias:

a) Según lo anterior, se tiene que un vector no nulo se puede expresar en términos de su vector unitario, del siguiente modo: $\bar{u} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \Rightarrow \bar{a} = |\bar{a}|\,\bar{u}$

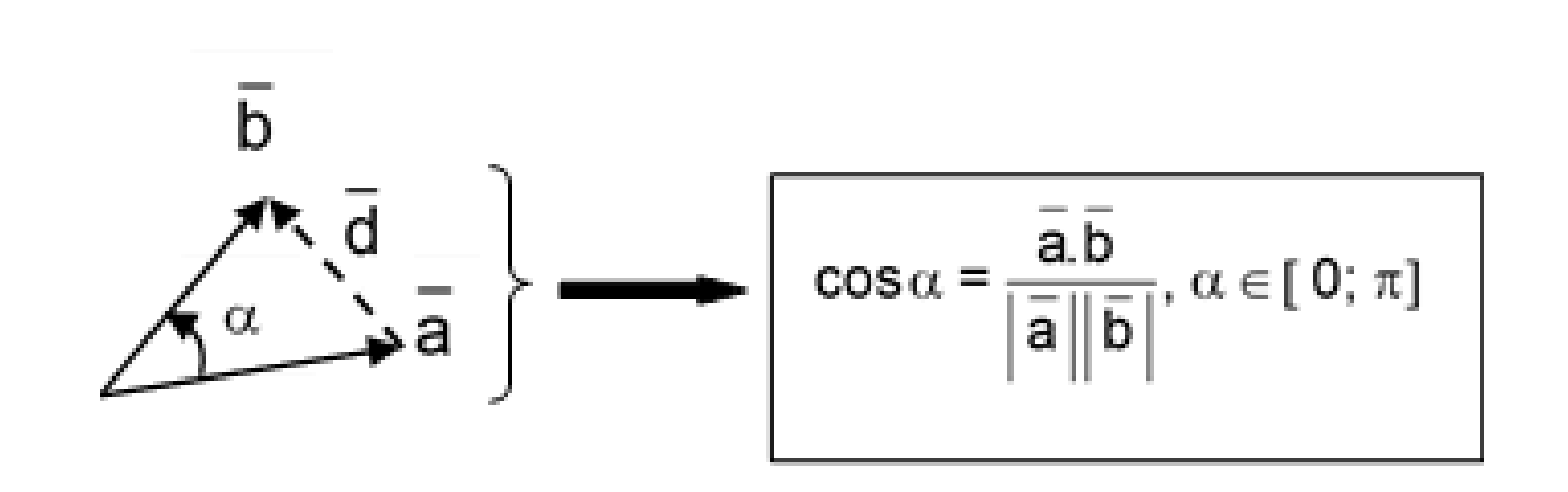
b) **Vectores unitarios notables. Son aquellos que se emplean en la construcción de las bases canónicas de los espacios vectoriales R^n; tales como:**

i) Base canónica de R^2 : $\{\bar{i}; \bar{j}\}$ donde $\bar{i} = (1,0)$; $\bar{j} = (0,1)$

ii) Base canónica de R^3 : $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; donde $\bar{i} = (1,0,0)$ $\bar{j} = (0,1,0)$ y $\bar{k} = (0,0,1)$

iii) Base canónica de R^n : $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; ...; \bar{e}_n\}$; donde $\bar{e}_1 = (1,0,...,0)$; $\bar{e}_2 = (0,1,...,0)$ y $\bar{e}_n = (0,0,...,1)$

Ángulo entre vectores. El ángulo α comprendido entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se calcula me - **diante:**



Demostración de la "definición"

Partimos del producto interno de los vectores dados:

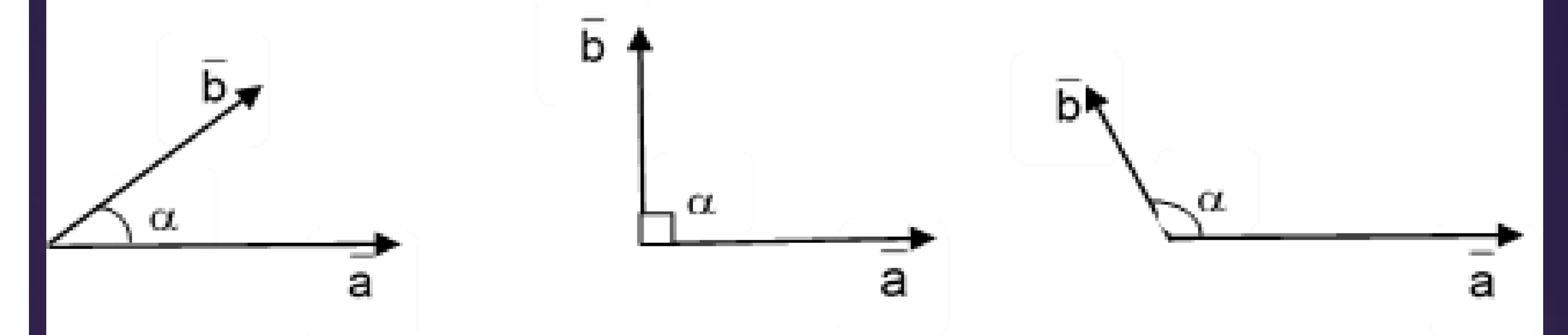
La distancia entre los vectores, según el grafico anterior, viene dada por:

$$|\bar{d}| = |\bar{b} - \bar{a}| \Rightarrow \begin{cases} \text{Ley de cosenos: } |\bar{d}|^2 = |\bar{b} - \bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha \ldots(1) \\ \text{Por propiedad de norma: } |\bar{d}|^2 = |\bar{b} - \bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{a}|^2 - 2\bar{a}.\bar{b} \ldots(2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2): } 2\bar{a}.\bar{b} = 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

Comentarios.

a) Se presentan los siguientes casos:



Notamos del primer grafico, $\bar{a}.\bar{b} > 0$ (ángulo agudo); del segundo : $\bar{a}.\bar{b} = 0$ $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ y del tercero : $\bar{a}.\bar{b} < 0$ (ángulo obtuso).

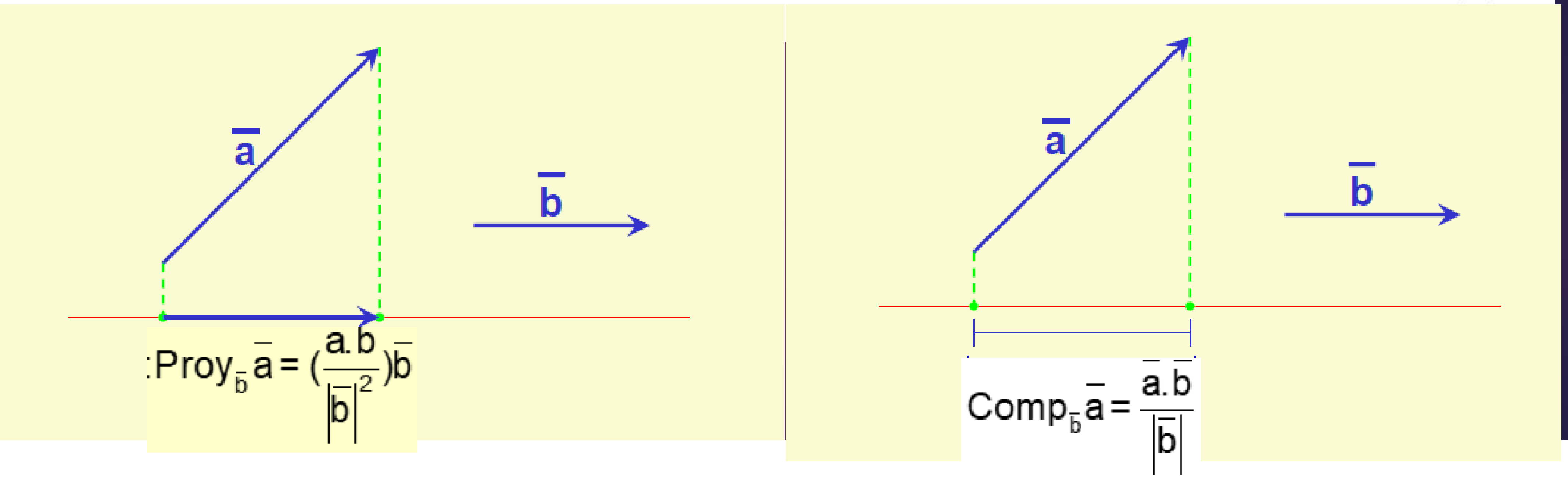
b) De $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, $\alpha \in [0; \pi]$; se deduce que $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha$

Proyección ortogonal de un vector en una direccción dada.

Definición.

$\bar{a} - \lambda\bar{b}$ $\lambda\bar{b}$

El vector proyección ortogonal de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ esta dado por : $Proy_{\bar{b}}\bar{a} = (\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|^2})\bar{b}$



Propiedades fundamentales:

i) $Proy_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = Proy_{\bar{b}}\bar{a} + Proy_{\bar{b}}\bar{c}.$ $\quad Comp_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = Comp_{\bar{b}}\bar{a} + Comp_{\bar{b}}\bar{c}.$

ii) $Proy_{\bar{b}}(r\bar{a}) = rProy_{\bar{b}}\bar{a};\ r \in R.$ $\quad Comp_{\bar{b}}r\bar{a} = rComp_{\bar{b}}\bar{a};\ r \in R$

iii) $Proy_{r\bar{b}}(\bar{a}) = Proy_{\bar{b}}\bar{a};\ r \in R - \{0\}.$ $\quad Comp_{r\bar{b}}\bar{a} = \frac{r}{|r|}Comp_{\bar{b}}\bar{a},$ donde $r \in R - \{0\}$

Demostraciones:

i) $Proy_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = [\frac{(\bar{a}+\bar{c}).\bar{b}}{|\bar{b}|^2}]\bar{b} = [\frac{\bar{a}.\bar{b}+\bar{c}.\bar{b}}{|\bar{b}|^2}]\bar{b} = (\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|^2})\bar{b} + (\frac{\bar{c}.\bar{b}}{|\bar{b}|^2})\bar{b} = Proy_{\bar{b}}\bar{a} + Proy_{\bar{b}}\bar{c}.$

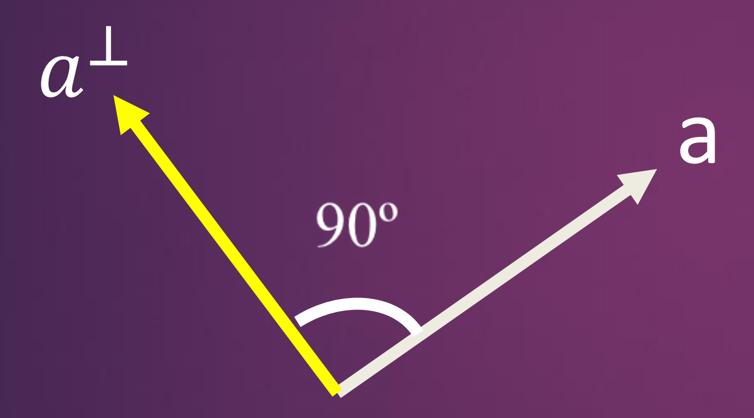
$Comp_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = \frac{(\bar{a}+\bar{c}).\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a}.\bar{b}+\bar{c}.\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|} + \frac{\bar{c}.\bar{b}}{|\bar{b}|} = Comp_{\bar{b}}\bar{a} + Comp_{\bar{b}}\bar{c}.$

iii) $Proy_{r\bar{b}}(\bar{a}) = [\frac{\bar{a}.(r\bar{b})}{|r\bar{b}|^2}](r\bar{b}) = \frac{r^2}{|r|^2}[\frac{\bar{a}.(\bar{b})}{|\bar{b}|^2}](\bar{b}) = Proy_{\bar{b}}\bar{a};\ r \in R - \{0\}.$

$Comp_{\ r\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}.(r\bar{b})}{|r\bar{b}|} = \frac{r}{|r|}\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{r}{|r|}Comp_{\ \bar{b}}\bar{a},$ donde $r \in R - \{0\}$

ORTOGONAL DE UN VECTOR EN R^2

Dado un vector tal como $a=(a_1, a_2)$ a partir de él se obtiene un vector que se obtiene de haciendo rotar en sentido antihorario 90º , se obtiene $a^{\perp}=(-a_2, a_1)$, al que se denota el ortogonal del vector a.



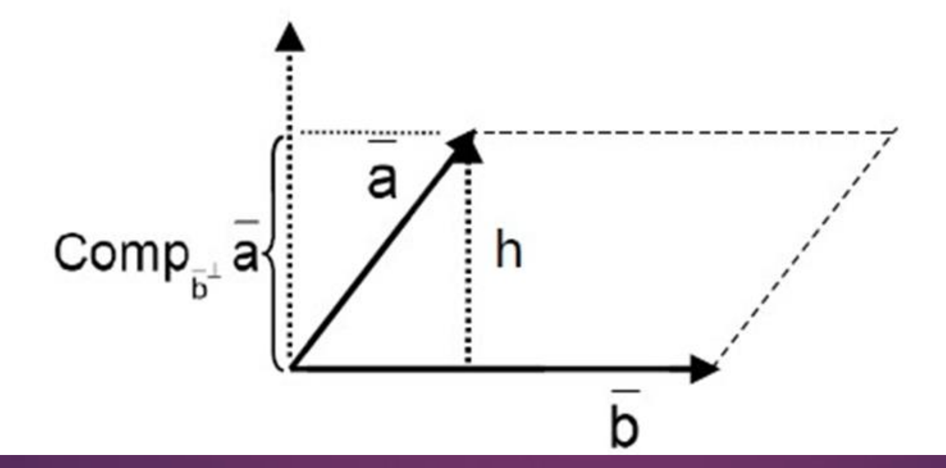
Propiedades

1. $a.a^{\perp}=0$
2. $(a^{\perp})^{\perp} = -a$
3. $(a+b)^{\perp} = a^{\perp}+b^{\perp}$

Interpretación geométrica del producto escalar canónico

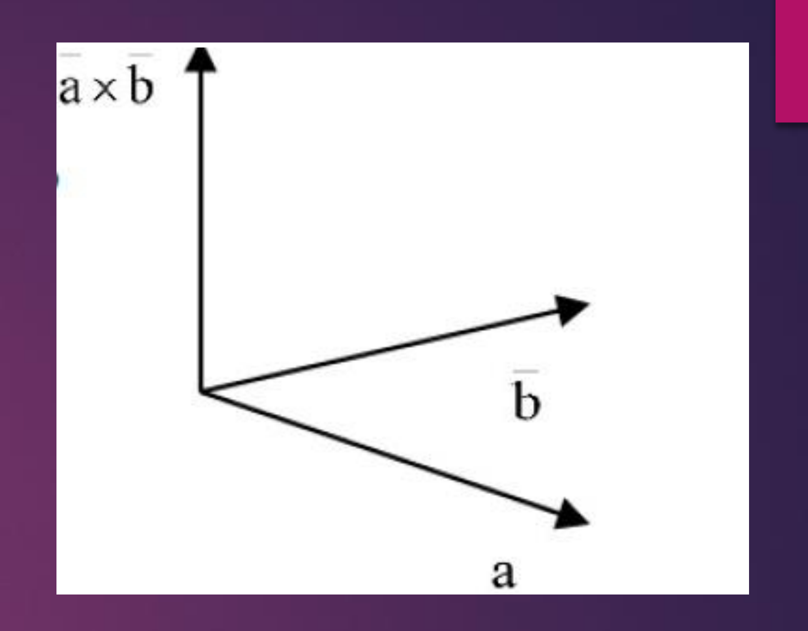
El *área* de un paralelogramo de lados $\bar{a}$ y $\bar{b}$ está dado por : Área $= \left|\bar{a}.\bar{b}^{\perp}\right|$ $\left(= \left|\bar{a}^{\perp}.\bar{b}\right|\right)$

Demostración:



$$\text{Área} = (\text{Base})(\text{altura}) = \left|\bar{b}\right| \left|\text{Comp}_{\bar{b}^{\perp}}\,\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right| \frac{\left|\bar{a}.\bar{b}^{\perp}\right|}{\left|\bar{b}^{\perp}\right|} = \left|\bar{a}.\bar{b}^{\perp}\right|$$

PRODUCTO VECTORIAL



El producto vectorial de dos vectores. Es una operación que va de $R^3 x R^3$ a R^3, donde a cada pareja de vectores $(\bar{a}, \bar{b})$ le asigna un único vector $\bar{c} = \bar{a} x \bar{b}$; que se calcula mediante:

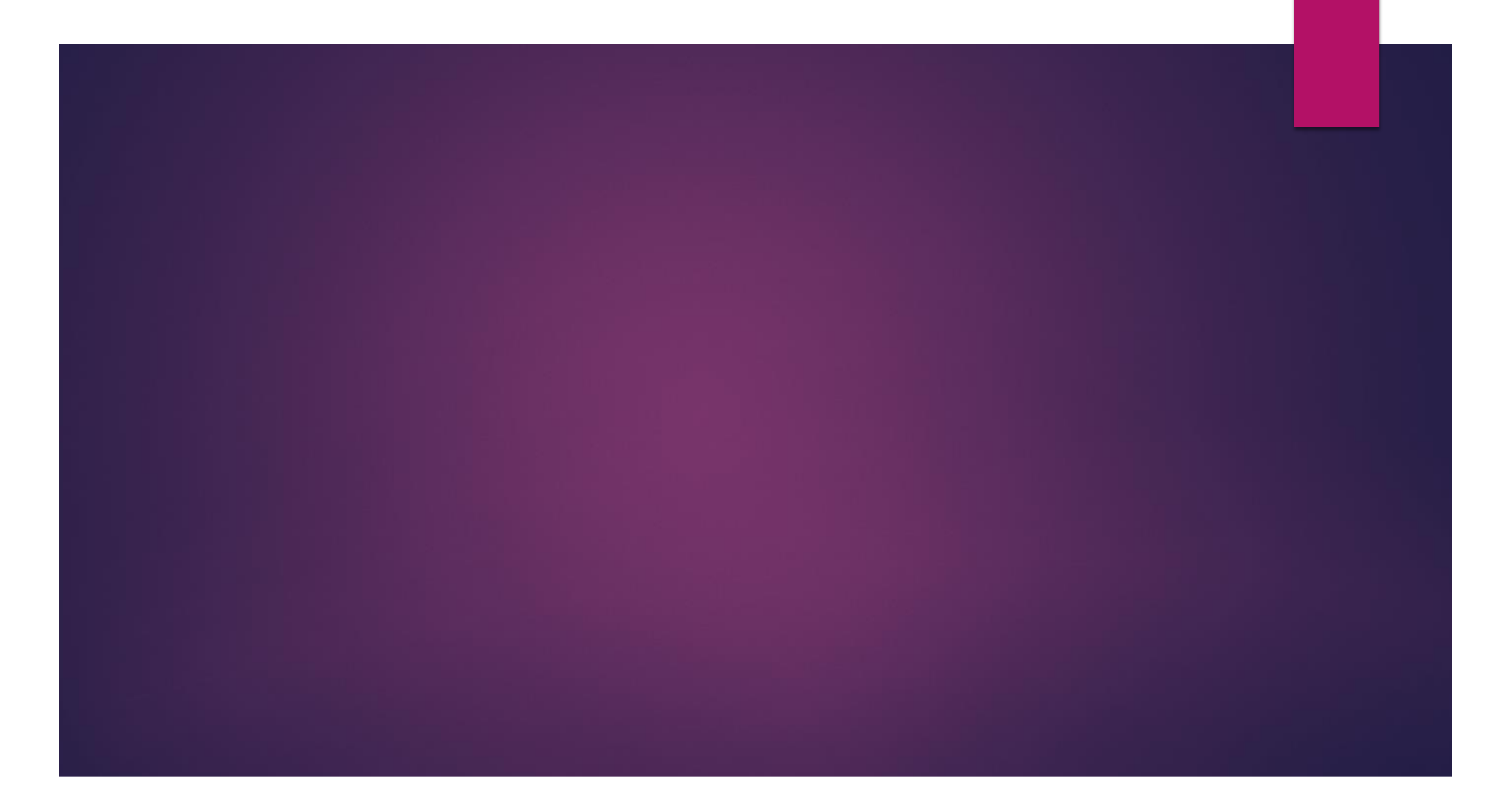
$$\bar{c} = \bar{a} x \bar{b} = (a_1, a_2, a_3) x (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

Comentarios:

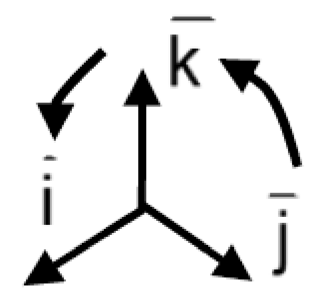
a) Una consecuencia inmediata, recordando la teoría de determinantes, es:

$$\bar{a}x\bar{b} = (a_1, a_2, a_3)x(b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

b) Por otro lado tenemos que $\bar{a}x\bar{b}$ es perpendicular tanto a $\bar{a}$ como a $\bar{b}$, y es tal que $\bar{a},\bar{b}$ y $\bar{a}x\bar{b}$, en ese orden, forman una triada derecha tal como se muestra en la figura



c) Según lo anterior, se tiene para el caso de los vectores $\bar{i}, \bar{j}$ y $\bar{k}$:



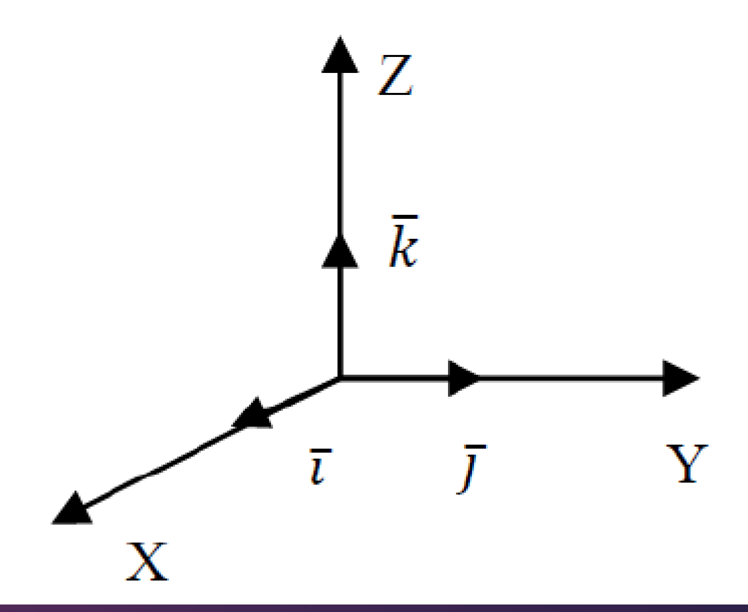
Según las propiedades se tiene

$$\bar{\imath}\times\bar{\imath} = \bar{\jmath}\times\bar{\jmath} = \bar{k}\times\bar{k} = \bar{o}$$

$$\bar{\imath}\times\bar{\jmath} = \bar{k}\,, \qquad \bar{\jmath}\times\bar{\imath} = -\bar{k}$$

$$\bar{\jmath}\times\bar{k} = \bar{\imath}\,, \qquad \bar{k}\times\bar{\jmath} = -\bar{\imath}$$

$$\bar{k}\times\bar{\imath} = \bar{\jmath}\,, \qquad \bar{\imath}\times\bar{k} = -\bar{\jmath}$$



Propiedades fundamentales.

i) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

ii) $\bar{a} x(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} x \bar{b} + \bar{a} x \bar{c}$

iii) $(r\bar{a}) x \bar{b} = r(\bar{a} x \bar{b}) = \bar{a} x (r\bar{b})$, donde $r \in K = R$

iv) $\bar{a} x \bar{a} = \bar{0}$

v) $\bar{a} x(\bar{b} x \bar{c}) = (\bar{a}.\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$

vi) Identidad de Lagrange : $|\bar{a} x \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}.\bar{b})^2$

Demostraciones:

$$\text{ii) } \bar{a}x(\bar{b}+\bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \bar{a}x\bar{b} + \bar{a}x\bar{c}$$

Demostración.

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$$

$$= \bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times(\bar{a}\times\bar{b})\right), \qquad (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

$$= \bar{a}\cdot\left[(\bar{b}\cdot\bar{b})\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{b}\right], \ \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$$

$$= \|\bar{b}\|^2\bar{a}\cdot\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

$$= \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$$

Finalmente,

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$$

vi) A partir de la identidad de Lagrange del álgebra básica para n variables:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) + \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$, para n = 3, queda :

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\le i<j\le 3} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$; lo cual llevado a la forma vectorial nos da :

$$|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 = (\bar{a}.\bar{b})^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

$$\Rightarrow |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 = (\bar{a}.\bar{b})^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \Rightarrow |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 = (\bar{a}.\bar{b})^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\Rightarrow |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 = (\bar{a}.\bar{b})^2 + |\bar{a}x\bar{b}|^2 \Rightarrow |\bar{a}x\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}.\bar{b})^2$$

Comentario. De la identidad de Lagrange se deduce:

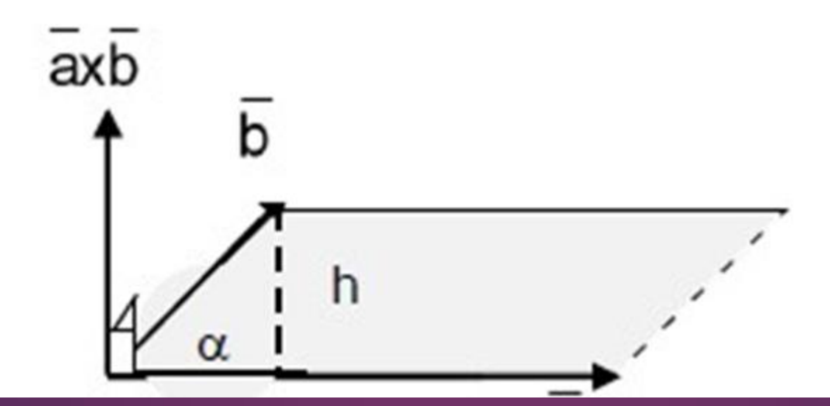
$$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}.\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha)^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 (1 - \cos^2\alpha) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\Rightarrow |\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \operatorname{sen}\alpha, \text{ donde } \alpha = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b})$$

Interpretación del producto vectorial.

Teorema. El área de un paralelogramo de lados $\bar{a}$ y $\bar{b}$ esta dado por : $A = |\bar{a} \times \bar{b}|$

Demostración:



$$\text{Se tiene que : Área} = |\bar{a}|h = |\bar{a}||\bar{b}|\operatorname{sen}\alpha = |\bar{a} \times \bar{b}|$$

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

El triple producto escalar de vectores en R^3. Dentro de las aplicaciones físicas y matemáticas muchas veces se presentan productos de vectores que tienen 3 o mas factores, siendo uno de ellos el llamado triple producto mixto.

Definición. Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c} \in R^3$, se define el triple producto escalar de $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$; en ese orden, y se denota por $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$, como : $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a}.(\bar{b} \times \bar{c})$

Propiedades fundamentales.

i) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & b_3 \end{vmatrix}$

ii) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}] = [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}]$

iii) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$

iv) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \|\bar{b} \times \bar{c}\| Comp_{\bar{b} \times \bar{c}} \bar{a}$

NOTAS.

1. Tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de R^3 son linealmente dependientes si y sólo si

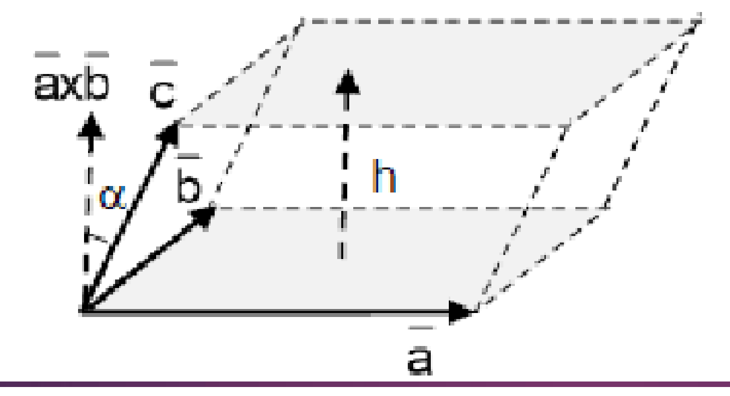
$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right] = \bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) = 0$$

2. La dependencia lineal de tres vectores es equivalente a que los tres vectores sean paralelos a un mismo plano.

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Teorema. El volumen del paralelepípedo de lados $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ esta dado por : $V = \left|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\right|$.

Demostración:



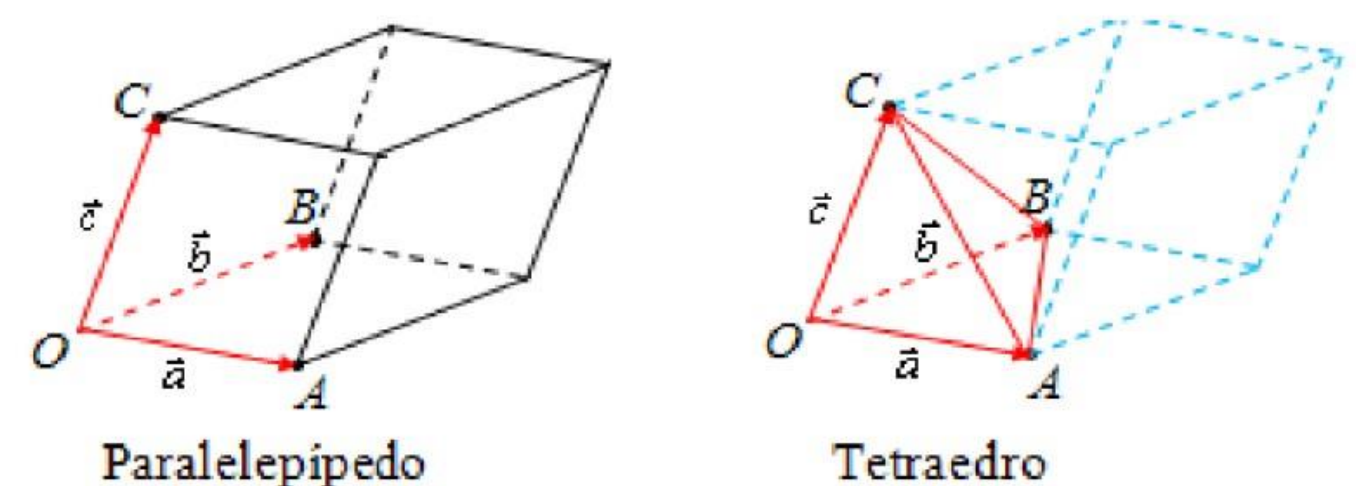
Tenemos : Volumen $= \left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right| h = \left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right|\left|\bar{c}\right|\left|\cos\alpha\right| \ldots (1)$

Pero $\cos\alpha = \left|\dfrac{(\bar{a}\,x\,\bar{b}).\bar{c}}{\left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right|\left|\bar{c}\right|}\right|$, reemplazando en (1) :

$$V = \left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right| h = \left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right|\left|\bar{c}\right|\left|\cos\alpha\right| = \left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right| h = \left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right|\left|\bar{c}\right| \frac{\left|(\bar{a}\,x\,\bar{b}).\bar{c}\right|}{\left|\bar{a}\,x\,\bar{b}\right|\left|\bar{c}\right|} = \left|(\bar{a}\,x\,\bar{b}).\bar{c}\right| = \left|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\right|$$

Como consecuencia, la sexta parte de ese valor da el volumen del tetraedro determinado por esos mismos vectores. Esto es:

$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$ = volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



Paralelepípedo Tetraedro

Para el tetraedro, cuyo volumen es $V_T = \frac{1}{3}$(área de la base por la altura) $= \frac{1}{3}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot h$, y puesto que su base es la mitad que la del paralelepípedo, se tendrá que $V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot h$.

Esto es, $V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$.

Se agradece su atenciòn